

MN I

# Examen VI

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# MN I

# Examen VI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Roxana Acedo Parra

Granada, 2024

**Asignatura** Métodos Numéricos I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. También Grado en Matemáticas y Doble Grado en Matemáticas y Física.

**Grupo** Único.

**Profesor** Juan José Nieto Muñoz.

**Fecha** 9 de abril de 2025.

**Duración** 2 horas.

**Descripción** Primer Parcial.

**Observaciones** Contiene respuestas a varias versiones, no a una única prueba. Este profesor, al darnos la corrección de este examen no diferenció entre las preguntas de nuestro examen y las del examen de Matemáticas y Matemáticas y Física. Los del DGIIM tuvimos que hacer el 1. a), c), d) y e), el 3) y 4).

**Ejercicio 1** (4 puntos). Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces se verifica que

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + f[y, x_0, x_0](y - x_0)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

b) Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y definimos  $g(x) := f[x, x_0]$ , entonces se verifica que

$$g'(x) = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0.$$

c) Dados dos números reales:  $y_0$  y  $y_1$  cumpliendo  $y_0 < y_1$ , y otros 2  $d_0$  y  $d_1$  estrictamente positivos, entonces el polinomio de grado menor o igual a 3 que resuelve el siguiente problema de interpolación de tipo Hermite, es estrictamente creciente.

$x_i$	0	1
$p(x_i)$	$y_0$	$y_1$
$p'(x_i)$	$d_0$	$d_1$

d) Dados 3 números reales:  $y_0, y_1, y_2$ , cumpliendo  $y_0 < y_1 < y_2$  y otro  $d_1$  estrictamente positivo, entonces el spline cuadrático  $s \in S_2(0, 1, 2)$  que resuelve el siguiente problema, es estrictamente creciente;

$$s(0) = y_0, \quad s(1) = y_1, \quad s(2) = y_2, \quad s'(1) = d_1.$$

e) Al interpolar una función  $f(x)$  cualquiera en 5 puntos diferentes, sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen; pero si la función de partida es un polinomio de grado 3, entonces hay un único polinomio de grado menor o igual a 5 que la interpola: el propio polinomio.

f) Al aproximar una función continua  $f(x)$  cualquiera mediante mínimos cuadrados discretos usando su valor en 5 nodos diferentes:  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_5\}$ , hay un único polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual a 4 que la ajusta y que, además, minimiza el siguiente error:

$$\sum_{i=1}^5 |p(x_i) - f(x_i)|. \quad (\text{es sin elevar al cuadrado, no una errata})$$

**Ejercicio 2** (2 puntos). Considera la función  $f(x) = e^{-(x^2/2)}$ .

a) Calcula, si es posible, un polinomio  $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$  que interpole a  $f$  en los nodos 1 y  $-1$  y a su derivada en 0. ¿Cuántos polinomios hay cumpliendo estas condiciones?

b) Si añadimos una cuarta condición:  $p(0) = f(0) = 1$ , pero seguimos buscando en  $\mathbb{P}_2[x]$ , que tiene dimensión 3, ¿habrá solución? En caso afirmativo, encuéntrala.

- c) Sabiendo que  $|f^{(3)}(x)| \leq 2$  en  $[-1, 1]$ , ¿podrías dar una estimación del mayor error cometido al aproximar  $f(x)$  en  $[-1, 1]$  por las evaluaciones del polinomio del apartado anterior?

**Ejercicio 3** (2 puntos). Dada la nube de puntos:  $\frac{x_i}{y_i} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}$

- a) Calcula el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima esta nube de puntos.
- b) Si añadimos el punto  $(4, 3)$  y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?
- c) Si cambiamos los datos  $y_i$  por  $\frac{y_i}{2}$  y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

**Ejercicio 4** (4 puntos). Considera la función  $f(x) = |x|$ , el espacio  $V = C([-π, π])$  con el producto escalar continuo:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

y el subespacio  $H$  generado por las funciones:  $\varphi_1(x) = \cos(x)$  y  $\varphi_2(x) = \cos(2x)$ .

- a) ¿Es posible encontrar alguna mejor aproximación por mínimos cuadrados continuos de  $f$  en  $H$ ? En caso afirmativo, calcúlalas todas.
- b) Calcula la distancia entre  $f$  y el subespacio  $H$  y determina si se alcanza en algún  $u \in H$ .
- c) Determina de manera justificada, una base ortogonal de  $H$ .

**Ejercicio 1** (4 puntos). Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces se verifica que

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + f[y, x_0, x_0](y - x_0)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Solución:** Cierto. Simplemente calculamos  $f[y, x_0, x_0]$  a partir de la correspondiente tabla de diferencias divididas con el nodo  $x_0$  repetido e  $y$  como tercer nodo:

$x_i$	$f(x_i)$		
$x_0$	$f(x_0)$		
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	
$y$	$f(y)$	$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$	$\frac{\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} - f'(x_0)}{y - x_0} := f[x_0, x_0, y]$

Y basta despejar  $f(y)$  de la última expresión.

b) Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y definimos  $g(x) := f[x, x_0]$ , entonces se verifica que

$$g'(x) = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0.$$

**Solución:** Cierto. Reescribimos  $g(x)$  usando las propiedades de las diferencias divididas (se puede usar la tabla de diferencias divididas con 2 nodos:  $x_0$  y  $x$ ):

$$g(x) := f[x, x_0] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y, derivando, obtenemos el resultado

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}.$$

c) Dados dos números reales:  $y_0$  y  $y_1$  cumpliendo  $y_0 < y_1$ , y otros 2  $d_0$  y  $d_1$  estrictamente positivos, entonces el polinomio de grado menor o igual a 3 que resuelve el siguiente problema de interpolación de tipo Hermite, es estrictamente creciente.

$x_i$	0	1
$p(x_i)$	$y_0$	$y_1$
$p'(x_i)$	$d_0$	$d_1$

**Solución:** Falso. Basta en pensar en polinomios de grado 3 (que son los que interpolan 4 datos que suban y bajen entre 0 y 1. Por concretar un contraejemplo:

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c), \quad \text{con } 0 < a < b < c < 1.$$

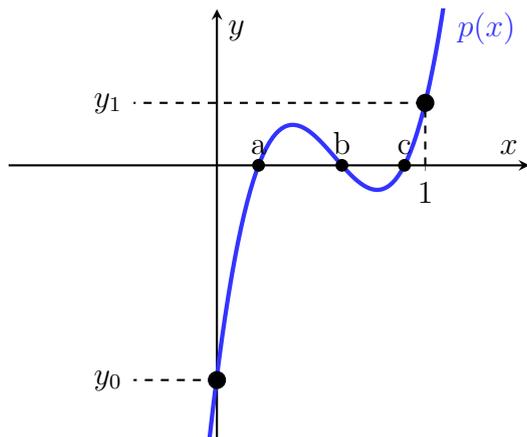


Figura 1: Ejemplo:  $p(x) = (x - 0,2)(x - 0,6)(x - 0,9)$

- d) Dados 3 números reales:  $y_0, y_1, y_2$ , cumpliendo  $y_0 < y_1 < y_2$  y otro  $d_1$  estrictamente positivo, entonces el spline cuadrático  $s \in S_2(0, 1, 2)$  que resuelve el siguiente problema, es estrictamente creciente;

$$s(0) = y_0, \quad s(1) = y_1, \quad s(2) = y_2, \quad s'(1) = d_1.$$

**Solución:** Falso. Basta pensar en dos polinomios de grado dos, uno convexo y otro cóncavo, que peguen bien en el nodo  $x = 1$ .

Por concretar un contraejemplo (pensamos en  $y_1 = 0$  de modo que  $x = 1$  sea un cero y nodo en común):

$$s(x) = \begin{cases} s(x)_1 = (x + a)(x - 1), & x \leq 1, \\ s(x)_2 = (2 + a - x)(x - 1), & x \geq 1, \end{cases}$$

con  $a > 0$  (el poner los ceros simétricos es para que salga derivable en 0 sin añadir nada).

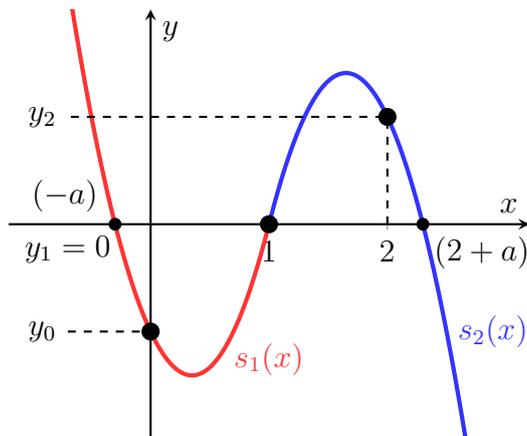


Figura 2: Ejemplo graficado con  $a = 0,3$

- e) Al interpolar una función  $f(x)$  cualquiera en 5 puntos diferentes, sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen;

pero si la función de partida es un polinomio de grado 3, entonces hay un único polinomio de grado menor o igual a 5 que la interpola: el propio polinomio.

**Solución.** Falso. La primera parte es, como sabemos, cierta: al interpolar en 5 puntos, hay unicidad en  $\mathcal{P}_4$ , pero nunca en  $\mathcal{P}_5$ ; sea quien sea la  $f$  que origina dichos puntos. Por tanto, que  $f$  sea un polinomio de grado 3 no cambia nada.

- f) Al aproximar una función continua  $f(x)$  cualquiera mediante mínimos cuadrados discretos usando su valor en 5 nodos diferentes:  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_5\}$ , hay un único polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual a 4 que la ajusta y que, además, minimiza el siguiente error:

$$\sum_{i=1}^5 |p(x_i) - f(x_i)|. \text{ (es sin elevar al cuadrado, no una errata)}$$

**Solución:** Cierto. Al aproximar en 5 puntos con polinomios de  $\mathcal{P}_4[x]$  (que tiene dimensión 5), el polinomio resultante es en realidad el que la interpola, ya que este minimiza el error (cuadrático), pues justo da un error igual a 0 (el mínimo posible). Por tanto  $|p(x_i) - f(x_i)| = 0$ , con o sin cuadrado, también es el mínimo posible: cero.

**Ejercicio 2** (2 puntos). Considera la función  $f(x) = e^{-(x^2/2)}$ .

- a) Calcula, si es posible, un polinomio  $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$  que interpole a  $f$  en los nodos 1 y  $-1$  y a su derivada en 0. ¿Cuántos polinomios hay cumpliendo estas condiciones?

Al interpolar en 2 nodos de tipo Lagrange, con un dato tipo Hermite en otro nodo (dejando un hueco), a priori no sabemos qué puede pasar. Elegimos en este caso coeficientes indeterminados,  $p(x) = A + Bx + Cx^2$ , e imponemos las condiciones a ver qué pasa:

$$\begin{cases} p(-1) = f(-1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ p(1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ p'(0) = f'(0) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B + C = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ A + B + C = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{e}} - C \\ B = 0 \end{cases}$$

$$p_C(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} + C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R},$$

lo que responde a la pregunta, hay infinitas posibilidades.

- b) Si añadimos una cuarta condición:  $p(0) = f(0) = 1$ , pero seguimos buscando en  $\mathbb{P}_2[x]$ , que tiene dimensión 3, ¿habrá solución? En caso afirmativo, encuéntrala.

Al añadir el dato  $p(0) = f(0)$ , hemos rellenado el hueco y ya así tenemos datos tipo Hermite que dan unisolvencia en  $\mathbb{P}_3[x]$ . Pero como nos piden en  $\mathbb{P}_2[x]$  de nuevo, podría no haber solución.

Aunque, visto lo ocurrido en el apartado anterior, parece que este dato simplemente va a fijar el valor de  $C$ : basta imponer ese dato más al que ya tenemos  $p_C(x) = 1 + C(x^2 - 1)$  a ver qué pasa:

$$p_C(0) = f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} - C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow p(x) = 1 + \frac{1 - \sqrt{e}}{\sqrt{e}}x^2$$

- c) Sabiendo que  $|f^{(3)}(x)| \leq 2$  en  $[-1, 1]$ , ¿podrías dar una estimación del mayor error cometido al aproximar  $f(x)$  en  $[-1, 1]$  por las evaluaciones del polinomio del apartado anterior?

La clave es que el polinomio obtenido:  $p(x) = 1 + \frac{e+1}{\rho}x^2$  interpola a  $f(x)$  en 3 nodos:  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 0$  (además de a su derivada, pero eso lo obviaremos), por lo que podemos usar la fórmula para el error de interpolación con  $n = 2$ :

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+1)x(x-1), \quad x \in [-1, 1]$$

A partir de aquí, podemos hacer varias estimaciones, no se pide la óptima, por ejemplo:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3}, \quad x \in [-1, 1]$$

**Ejercicio 3** (2 puntos). Dada la nube de puntos:

$x_i$	0	1	2	2	1	0
$y_i$	2	1	3	1	2	0

- a) Calcula el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima esta nube de puntos.

Para buscar  $p(x) = c_0 + c_1x$ , aplicamos los resultados de clase:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G = A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = A^T y = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = 1 + \frac{x}{2}.$$

- b) Si añadimos el punto  $(4, 3)$  y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

Puesto que  $p(4) = 1 + \frac{4}{2} = 3$ , el punto adicional  $(4, 3)$  resulta que es un punto de la gráfica de  $p(x)$  y, aunque se pueden repetir los cálculos con un punto más, sabemos que saldrá el mismo polinomio, pues cualquier otro aumentaría el error.

- c) Si cambiamos los datos  $y_i$  por  $\frac{y_i}{2}$  y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

Aunque se puede repetir la cuenta, en general, al multiplicar los datos por un escalar no nulo y rehacer el ajuste, se obtiene el mismo polinomio de antes multiplicado por el mismo escalar; veámoslo usando el sistema abstracto. Llamamos  $c_\lambda$  a los nuevos coeficientes del nuevo polinomio.

$$(A^T A)c_\lambda = A^T(\lambda y) = \lambda A^T y \Rightarrow c_\lambda = (A^T A)^{-1}(\lambda A^T y) = \lambda(A^T A)^{-1}A^T y = \lambda c.$$

Por tanto, en nuestro caso, se obtendría  $p(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ .

**Ejercicio 4** (4 puntos). Considera la función  $f(x) = |x|$ , el espacio  $V = C([-\pi, \pi])$  con el producto escalar continuo:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

y el subespacio  $H$  generado por las funciones:  $\varphi_1(x) = \cos(x)$  y  $\varphi_2(x) = \cos(2x)$ .

- a) ¿Es posible encontrar alguna mejor aproximación por mínimos cuadrados continuos de  $f$  en  $H$ ? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

Este ejercicio es aplicación directa del teorema de mínimos cuadrados, puesto que  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es prehilbertiano y  $H \subseteq V$  es de dimensión finita. Por lo tanto, sí hay una única mejor aproximación de  $f$  en  $H$  y sabemos calcularla, pues incluso nos han dado una base de  $H$ :  $\mathcal{B} = \{\cos(x), \cos(2x)\}$ . Concretamente  $u_f = c_0 \cos(x) + c_1 \cos(2x)$  y  $c = (c_0, c_1)$  es la única solución del sistema de Gramm.

$$Gc = b \text{ con } G = \begin{pmatrix} \langle \cos(x), \cos(x) \rangle & \langle \cos(x), \cos(2x) \rangle \\ \langle \cos(2x), \cos(x) \rangle & \langle \cos(2x), \cos(2x) \rangle \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \langle f(x), \cos(x) \rangle \\ \langle f(x), \cos(2x) \rangle \end{pmatrix}$$

Haciendo las (tediosas pero triviales) cuentas, el sistema obtenido es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = \frac{-4}{\pi} \cos(x)$$

- b) Calcula la distancia entre  $f$  y el subespacio  $H$  y determina si se alcanza en algún  $u \in H$ .

De nuevo usando el teorema de la mejor aproximación, sabemos que sí se alcanza, en  $u_f$ :

$$\|f - u_f\| = \min_{u \in H} \|f - u\| = \text{dist}(f, H).$$

Por tanto solo hay que calcular

$$\|f - u_f\| = \sqrt{\langle f - u_f, f - u_f \rangle} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( |x| + \frac{4}{\pi} \cos(x) \right)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi^4 - 24}{3\pi^2}}.$$

- c) Determina de manera justificada, una base ortogonal de  $H$ .

Al calcular la matriz de Gramm ya hemos visto que  $\langle \cos(x), \cos(2x) \rangle = 0$ , por lo que la base que nos han dado ya es ortogonal, y no hay que hacer nada, salvo indicarlo. Y si uno no se da cuenta y aplica Gramm-Schmidt, todas las operaciones también están incluidas en el cálculo de  $G$ :

$$\varphi_0 = \cos(x), \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle} \varphi_0 = \cos(2x) - \frac{\langle \cos(2x), \cos(x) \rangle}{\langle \cos(x), \cos(x) \rangle} \cos(x) = \cos(2x)$$